

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – județul Neamț**  
**30 IANUARIE 2010**

**CLASA a VI-a**

1. La un turneu final de Campionat Mondial și European de fotbal, participă mai multe echipe naționale. Numărul lor este multiplu de patru. Ele sunt împărțite în grupe de câte patru echipe. În prima fază, faza grupelor, se joacă în fiecare grupă, meciuri, după sistemul "fiecare joacă cu fiecare", la fel și în celelalte grupe. În faza a doua, eliminatorie, echipele clasate pe primele două locuri în fiecare grupă, joacă meciuri eliminatorii, după sistemul, "cine pierde pleacă acasă" (de exemplu, dacă sunt opt echipe în faza a doua, se vor juca patru meciuri eliminatorii, iar cele patru câștigătoare joacă mai departe două meciuri ...Se joacă până rămân 2 echipe). În finală vor rămâne două echipe, care joacă finala, iar echipa învingătoare devine campioană. Se știe că la Campionatul Mondial participă 32 de echipe.

- Câte meciuri se vor juca la un Campionat Mondial ?
- Câte meciuri joacă echipa campioană mondială?
- Dacă în faza "grupelor", se joacă câte patru meciuri pe zi, în faza "eliminatorie" câte două meciuri pe zi, iar finala se joacă în zi separată, în câte zile se va juca tot Campionatul Mondial ? (presupunem că nu există zile de pauză).
- Campionatul European de fotbal se desfășoară după același sistem, ca și Campionatul Mondial. Dacă la Campionatul European s-au jucat în total 31 de meciuri, câte echipe au participat? (Justificați răspunsul).

2. Numerele naturale de la 1 la 2010 sunt aranjate ca mai jos. Pe ce rând și coloană este numărul 2010. (Justificați răspunsul)

Rândul 1:	3			11			19		
Rândul 2:	2	6	10	14	18	22	· ·		
Rândul 3:	1	5	9	13	17	21	25 ...		
Rândul 4:	4	8	12	16	20	24	· ·		
Rândul 5:	7			15			23		

3. Fie  $M_1$  mijlocul segmentului  $[AB]$ ,  $M_2$  mijlocul segmentului  $[AM_1]$ ,  $M_3$  mijlocul segmentului  $[AM_2]$ , ...,  $M_n$  mijlocul segmentului  $[AM_{n-1}]$ . Dacă  $AM_n = 1\text{cm}$ , calculați  $S = AM_n + AM_{n-1} + \dots + AM_3 + AM_2 + AM_1$ . Aflați  $n$  dacă  $S = 127$ .

4. În jurul punctului  $O$  sunt desenate unghiuri având măsurile în ordinea  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ, \dots, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ$ .

- Câte unghiuri sunt desenate în jurul punctului  $O$  ?
- Notând cu  $O_1, O_2, O_3, \dots$  unghiurile determinate anterior în jurul punctului  $O$ , determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $O_6$  și  $O_{14}$ .

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii**  
**Timp de lucru: 3 ore**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
30 IANUARIE 2010**

**CLASA a VI-a    BAREM**

**NU EXISTĂ PUNCT DIN OFICIU**

1. În prima fază în fiecare din cele 8 grupe sunt 4 echipe. Echipa 1 joacă 3 meciuri cu echipele 2, 3, 4. Echipa 2 mai joacă 2 meciuri cu echipele 3 și 4. Echipa 3 mai joacă 1 meci cu echipa 4. Într-o grupă se joacă 6 meciuri. În 8 grupe se joacă 48 meciuri. **1p**

În a doua fază în cele 8 grupe rămân câte 2 echipe (primele două), deci 16 echipe. După 8 jocuri rămân în competiție 8 echipe și 8 pleacă. Cele 8 echipe joacă 4 meciuri și rămân în competiție 4 echipe. După încă 2 jocuri, rămân 2 echipe. În total se joacă 14 meciuri. **1p**

În a treia fază se joacă 1 joc. Total  $48+14+1=63$  meciuri. **1p**

b) Echipa câștigătoare joacă în prima fază 3 meciuri, în a doua fază 3 meciuri și 1 meci în finală. În total 7 meciuri. **1p**

c) În prima fază cele 48 meciuri se joacă în 12 zile. În a doua fază cele 14 meciuri se joacă în 7 zile. În a treia fază meciul se joacă într-o zi. Total 20 zile. **1p**

d) Din cele 31 meciuri, 1 meci e finală și rămân de jucat 30 meciuri. **0,5p**

În prima fază voi avea un număr de jocuri divizibil cu 6. Acest număr nu poate fi 30 pentru că se elimină faza 2.

Dacă în prima fază se joacă 24 meciuri, atunci avem 4 grupe de câte 4 echipe care joacă în faza unu 24 meciuri și în faza 2 6 meciuri. Deci avem 16 echipe. **1p**

Alte cazuri se demonstrează că nu sunt bune. **0,5p**

2. Se observă că numerele de pe primul rând cresc din 8 în 8, deci sunt de forma  $3+8k$ ,  $k \geq 0$ . Numărul 2010-3 nu se împarte la 8, deci 2010 nu este pe primul rând.

Numărul nu este pe rândurile 3 și 5 pentru că acestea sunt numere impare.

Numerele de pe rândul al doilea cresc din 4 în 4, deci sunt de forma  $2+4k$ ,  $k \geq 0$ .  $2010=2+4 \cdot 502$ . Deci numărul este pe rândul 2. **4p**

Numerele de pe rândul 2 sunt astfel împărțite pe coloane:

$$2 = 2 + 4 \cdot 0 \text{ este pe coloana } (0+1) \cdot 2$$

$$6 = 2 + 4 \cdot 1 \text{ este pe coloana } (1+1) \cdot 2$$

$$10 = 2 + 4 \cdot 2 \text{ este pe coloana } (2+1) \cdot 2$$

....

$$2010=2 + 4 \cdot 502 \text{ este pe coloana } (502+1) \cdot 2 = 503 \cdot 2 = 1006. \quad \mathbf{3p}$$

3. Considerăm segmentul  $AB = x$  cm. Atunci  $AM_1 = \frac{x}{2}$  cm,  $AM_2 = \frac{x}{2^2}$  cm,  $AM_3 = \frac{x}{2^3}$  cm....

$$AM_n = \frac{x}{2^n} \text{ cm.}$$

$$\mathbf{2p.} \text{ Cum } AM_n = 1 \text{ cm} \Rightarrow x = 2^n$$

**1p**

$$\text{Atunci } AM_1 = 2^{n-1} \text{ cm, } AM_2 = 2^{n-2} \text{ cm, } AM_3 = 2^{n-3} \text{ cm.... } AM_n = 1 \text{ cm.} \quad \mathbf{1p}$$

$$S = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1. \text{ Se înmulțește } S \text{ cu } 2 \text{ și se scad relațiile și } \Rightarrow S = 2^n - 1. \quad \mathbf{2p}$$

$$\text{Obținem } n=10. \quad \mathbf{1p}$$

4. Suma unui set de unghiuri este:  $(1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 6^\circ + 7^\circ + 8^\circ + 9^\circ) = 40^\circ$ . **2p**

$360^\circ : 40^\circ = 9$  seturi de astfel de unghiuri. Deci în total sunt  $8 \cdot 9 = 72$  unghiuri. **3p**

$$\text{Măsura unghiului cerut este: } \frac{7^\circ}{2} + 8^\circ + 9^\circ + 1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + 4^\circ + 6^\circ + \frac{7^\circ}{2} = 40^\circ. \quad \mathbf{2p}$$